УДК 550.831+550.8

Ю. І. Дубовенко

Відновлення магнітного потенціалу в задачі Алексідзе

(Представлено академіком НАН України В. І. Старостенком)

Розглянуто основні обмеження задачі Алексідзе. На її підставі подано економічний спосіб розв'язання задачі ітераційного уточнення трансформацій магнітного поля, виходячи з адитивного зображення магнітного потенціалу. Доведено теорему единості розв'язку вказаної задачі.

У процесі вивчення особливостей трансформації регіональних та глобальних аномалій поля сили тяжіння $g(x)$ у зовнішньому просторі y^+ виявлено, що їх з адекватною потребам геофізичної практики точністю доцільно здійснювати шляхом розв'язання нелінійної граничної задачі Алексідзе[1] [1] для рівняння Лапласа, в граничних умовах якої безпосередньо стоять значення сили тяжіння $g(x) = |\operatorname{grad} W(x)|$. Узагальнена постановка задачі Алексідзе така: знайти потенціал $W(x)$, $x \in y^+$, який задовольняє всередині замкнутої області $\overline{y}^+ = y^+ \bigcup \partial y$ рівнянню Лапласа $\Delta W(x) = 0$, $x \in y^+$, а в точках межі ∂y Ляпунова області y^+ і в нескінченності — умовам:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_k} \right)^2 = g^2(x), \quad x_i \in \partial y, \\ \displaystyle\lim_{|x| \to \infty} W(x) \to 0, \end{cases} \tag{1}$$

де $g(x)$ — задана функція; y^- — обмежена область точок евклідового простору $\mathbb{R}^3$, яка зайнята масами Землі; y^+ — її необмежене доповнення без мас, які тяжіють; ∂y — межа областей y^- й y^+ (поверхня вимірювань).

Її розв'язок, у силу обраної однорідної шаруватої моделі середовища, визначається потенціалом *простого шару* з невідомою густиною, поширеною на контактній поверхні типу Ляпунова. Ця густина визначається як розв'язок рівняння сили тяжіння [2], аналітичний вираз якого є наслідком аналізу властивостей модуля градієнта потенціалу $|\operatorname{grad} W(x)|$, а конкретний вигляд залежить від обраної моделі Землі. У плоскому випадку ця задача отримала алгоритмічне розв'язання за допомогою ітерацій [3]. Точність її розв'язку істотно залежить від міри зумовленості цієї задачі, параметрів числового методу (числа і розташування фундаментальних розв'язків), наближень напряму шуканого градієнта, напряму зовнішньої нормалі, уздовж якої обчислюють похідні у граничних умовах (тобто врахування векторної природи поля) [4]. Однак її розв'язання успішне на простих моделях середовища за певних обмежень на поведінку розв'язку [4].

Задача (1) орієнтована на аналітичне продовження поля поза джерела аномальних мас при заданій з певною точністю моделі середовища, відомих обмеженнях на середовище та

[1]Очевидно, вперше задачу для поверхні Ляпунова оприлюднено в доповіді А. В. Чорного "Задача Алексидзе для уравнения Лапласа и использование ее решений в геофизике // Теория и практика интерпретации потенциальных полей", Ленінакан, 1986.

похибки вимірювань. На параметри середовища накладають обмеження у вигляді кускової неперервності і диференційовності за Фреше — зображення приростів розв'язків задачі лінійною комбінацією приростів параметрів моделі, тобто виділення *головної лінійної частини* шуканого розв'язку $\sigma(\xi)$.

Основне апріорне припущення щодо поведінки шуканого розв'язку оберненої задачі — *лінійна незалежність* оператора розв'язку та його похідних — забезпечується одним з методів [5]. Указаних обмежень достатньо для забезпечення числової збіжності до точного розв'язку. Виявлена неоднозначність розв'язків задачі через їх скінченну вертикальну роздільну здатність, неадекватний вибір моделі задачі та/або початкових наближень розв'язку $\sigma(\xi)$ властива самій природі обернених задач з похідними в граничних умовах (1). Точність дискретизації задачі залежить і від способу обчислень похідних. До нюансів числового моделювання належать: осциляція інтегральних ядер операторів оберненої задачі; істотна залежність візуалізації цих ядер від обраного способу гріддінгу. Нівелювати осциляцію можна, задіявши конструкції типу інтегралу Шварца для смуги [6], а нюанси графічної візуалізації потребують експериментального дослідження та вибору адекватного інструментарію.

Незважаючи на складнощі числової реалізації задачі Алексідзе, вже можна окреслити сферу її застосування: уточнення фігури Землі та аналітичних трансформацій гравімагнітних полів. Зупинимось детальніше на способі відновлення магнітного потенціалу в задачі Алексідзе.

Якщо магнітний потенціал зобразити як суму $V(x) = U(x) + T(x)$ нормального магнітного потенціалу $U(x)$ для даної епохи та збурювального магнітного потенціалу $T(x)$, то розв'язок задачі відновлення магнітного потенціалу $V(x)|_{x=0}$ за заданими на границі значеннями модуля його градієнта $Z(x) = |\operatorname{grad} V(x)|$, $x \in \partial y$, у спрощеному варіанті зведемо до такого ітераційного процесу відновлення збурювального потенціалу:

$$V_j^{(i+1)}(x) = \frac{\partial U(x)}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j}, \qquad V_{jk}^{(i+1)}(x) = \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k}, \tag{2}$$

де

$$\frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial x_j} = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y} \frac{x_j - \xi_j}{|x-\xi|^3}\delta_{i+1}(\xi)\, dS_\xi;$$

$$\frac{\partial^2 T_{i+1}(x)}{\partial x_j \partial x_k} = \frac{3}{4\pi}\int\limits_{\partial y} \frac{(x_j - \xi_j)(x_k - \xi_k)}{|x-\xi|^5}\delta_{i+1}(\xi)\, dS_\xi.$$

Далі визначаємо напрямні косинуси $\cos(n_{i+1}, x_k) = V_k^{(i+1)}(x)/Z_{i+1}(x)$ для визначення наближення модуля градієнта магнітного потенціалу:

$$Z_{i+2}(x) = Z_{i+1}(x) - \omega^2 \sum_{k=1}^{3} \cos(n_{i+1}, x_k) x_k, \qquad x \in \partial y, \tag{3}$$

який потрібен для обчислення чергового наближення збурювального магнітного потенціалу:

$$T_{i+2}(x) = Z_{i+2}(x)\cos(n_{i+1}, m) - \gamma(x)\cos(\nu, m), \qquad x \in \partial y. \tag{4}$$

Звідси неважко знайти наближення магнітного потенціалу:

$$V^{(i+2)}(x) = U(x) + T_{i+2}(x). \tag{5}$$

За нормальний потенціал доцільно брати аномальне поле однорідно намагніченої сфери; у такому разі збурювальний потенціал $T(x)$ відбиватиме поле реальних об'єктів, які не враховані у цій моделі. Крім даних $Z(x)$, $x \in \partial y$ (по-суті, це значення $\Delta T_a(x)$), нам відомі не лише рівняння фізичної поверхні ∂y Землі, а й вектор одиничної нормалі $m(x) = \cos(x_k, m_x)$, $k = 1, 2, 3$ до цієї поверхні майже у будь-якій її точці. А оскільки відомо і нормальне поле $U(x)$, то у будь-якій точці x замкнутої області $\overline{y}^+$ можна обчислити нормаль $\nu(x) = \cos(\nu, x_k)$ до еквіпотенціальної поверхні $U(x) = Cx$, яка проходить через точку x, $\cos(\nu, x_k) = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\partial U(x)}{\partial x_k}$ та значення $\cos(\nu, m) = \sum\limits_{k=1}^{3} \cos(\nu, x_k)\cos(x_k, m)$, де $1/\gamma(x) = |\operatorname{grad} V(x)|$.

Теорема 1. *Якщо поверхня Землі ∂y є множиною Ляпунова, то магнітний потенціал $V(x)$, $x \in y^+$, даної епохи відновлюється однозначно з напруженості $Z(x)$, $x \in \partial y$, магнітного поля цієї епохи.*

Схематично доведемо збіжність послідовних наближень $V_i(x)$, $i = 0, \infty$, до магнітного потенціалу реальної Землі $V(x)$, $x \in y^+$. Припустимо, що вже збудоване $i - 1$ наближення як магнітного потенціалу $V_0(x), V_1(x), \ldots, V_{i-1}(x)$, так і напрямних косинусів $\cos(n_0, x_k) = \cos(\nu, x_k), \ldots, \cos(n_i, x_k)$, $k = \overline{1, 3}$, $i = 0, 1, 2$, нормалі $n(x)$ до еквіпотенціальної поверхні $V(y) = Cx$, яка проходить через розглядувану точку $x \in \overline{y}^+$.

На подальшому i-му кроці послідовно визначимо

$$\cos(n_i, m) = \sum_{k=1}^{3} \cos(n_i, x_k)\cos(x_k, m)$$

та граничну умову

$$F_i(x) = Z(x)\cos(n_i, m) - \gamma(x)\cos(\nu, m)$$

для знаходження i-го наближення густини $\delta_i(x)$ потенціалу простого шару $T_i(x)$ з лінійного інтегрального рівняння Фредгольма:

$$\delta_i(x) + \int\limits_{\partial y} K(x, \xi)\delta_i(\xi)\, dS_\xi = 2F_i(x), \qquad x \in \partial y, \tag{6}$$

з ядром

$$K(x, \xi) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial m_x}\frac{1}{|x - \xi|} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\cos(u, m)}{|x - \xi|},$$

де $u = x - \xi$. Далі обчислимо наближення

$$T_i(x) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\partial y}\frac{\delta_i(\xi)}{|x - \xi|}dS_\xi, \quad V_i(x) = U(x) + T_i(x), \quad Z_i(x) = \sqrt{\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_k}\right)^2}, \quad x \in \overline{y}^+, \tag{7}$$

та $i + 1$ наближення напрямних косинусів нормалі $n(x)$ за формулою

$$\cos(n_i, x_k) = \frac{1}{Z_i(x)}\frac{\partial V_i(x)}{\partial x_k}, \qquad k = \overline{1, 3}.$$

Послідовність $\{T_i(x)\}$ збігається, що є наслідком із теореми, доведеної А. В. Чорним [7] (про природу потенціалу наразі не йдеться).

Теорема 2. *Якщо величиною $\varepsilon^2(x)$ квадрату відношення модуля градієнта збурювального потенціалу до модуля нормального потенціалу можна знехтувати порівняно з $\varepsilon(x)$, то послідовність розв'язків $\{T_i(x)\}$ граничних задач*

$$\Delta T_{i+1}(x) = 0, \quad x \in \overline{y}^+, \quad \lim_{|x|\to\infty} T_{i+1}(x) \to 0, \quad \frac{\partial T_{i+1}(x)}{\partial m_x} = F_{i+1}(x), \quad x \in \partial y, \tag{8}$$

збігається до збурювального потенціалу $T(x)$, $x \in y^-$, якщо $\|T(x)\|_C \ll \|U(x)\|_C$.

Але виконання останньої умови при відновленні магнітного потенціалу зовсім не обов'язкове, оскільки гранична умова $\partial T_{i+1}(x)/\partial m_x = F_{i+1}(x)$, $x \in \partial y$, є простішою, ніж гранична умова $F_i(x) = Z(x)\cos(n_i, m) - \gamma(x)\cos(\nu, m)$. Для збіжності послідовності $\{T_i(x)\}$ достатньо, щоб існувала нерівність $Z(x) < \gamma(x)/\cos(\nu, m)$, $x \in \partial y$.

Зауважимо, що вказана схема відновлення потенціалу $T_i(x)$ значно економічніша за обсягом очислень, ніж схема, що запропонована в статті [8].

Таким чином, достатньо, крім того, вказати, що якість числового розв'язку — середньоквадратичне відхилення (варіація) параметрів моделі задачі та вхідних даних від початкового наближення на поточній ітерації — контролюється за критерієм нев'язки за додаткової умови дотримання мінімальної роздільної здатності. У будь-якому разі, вона залежить від міри зумовленості конкретної числової задачі та вибору початкових наближень розв'язку.

1. *Дубовенко Ю. І.* Задача Алексідзе для відновлення потенціалу сили тяжіння // Геофіз. журн. – 2009. – **31**, № 6. – С. 132–139.
2. *Дубовенко Ю. І.* Редукція задачі Алексідзе до рівняння сили тяжіння // Доп. НАН України. – 2009. – № 12. – С. 112–119.
3. *Дубовенко Ю. І.* Розв'язність задачі Алексідзе // Там само. – 2010. – № 1. – С. 115–122.
4. *Дубовенко Ю. І.* Деякі проблеми обчислення трансформацій гравітаційного поля // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. Геологія. – 2010. – Вип. 51. – С. 14–21.
5. *Алексидзе М. А.* Решение граничных задач методом разложения по неортогональным функциям. – Москва: Наука, 1978. – 351 с.
6. *Дубовенко Ю. І.* Відновлення контактної границі в шаруватому середовищі // Геофіз. журн. – 2002. – **24**, № 6. – С. 36–41.
7. *Чорний А. В.* Про нову задачу для рівняння Лапласа // Вісн. Київ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. – 1995. – Вип. 13. – С. 72–80.
8. *Якимчик А. И.* О способе решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода // Доп. НАН України. – 2000. – № 12. – С. 156–159.

Інститут геофізики ім. С. І. Субботіна
НАН України, Київ

Надійшло до редакції 31.08.2010

Yu. I. Dubovenko

A magnetic potential restoration in the Alexidze problem

The main limitations of the Alexidze problem are considered. On its basis, the efficient method of solution of the problem of iterative specification of transformations of a magnetic field is given, proceeding from the additive presentation of a magnetic potential. A theorem of uniqueness of the solution of the problem is proved.